Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272
F. Beukers. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$

Замечание об иррациональности $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$

Ф. Бейкерс

1. Введение. В “Journées Arithmetiques”, вышедшем в Марселе–Люмини в июне 1978 г., Р. Апери предложил вниманию чудесное доказательство иррациональности $\zeta(3) = 1^{-3} + 2^{-3} + 3^{-3} + \cdots$. Оно было “чудесным” по двум причинам. С одной стороны, много шагов в доказательстве было пропущено, а с другой стороны, используемые формулы настолько сбивали с толку, что большинство людей не знало как это все понимать. Двумя месяцами позже на Международном конгрессе математиков в Хельсинки в августе 1978 г. Г. Коэн представил полное доказательство. Это доказательство было основано на лекции Апери, но содержало идеи Коэна и Дон Загера. За более подробным изложением этой короткой истории я отсылаю к А. ван дер Портену [1]. Доказательство Апери должно быть опубликовано в “Acta Arithmetica”.

В этой заметке мы приведем иное доказательство иррациональности $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$, более короткое и, как мне кажется, более элегантное. Это доказательство опирается на использование двойных и тройных интегралов, появление которых частично мотивировано формулами Апери.

2. Всюду в этой работе наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ мы обозначаем через d_n. Величина d_n может быть вычислена как

$$d_n = \prod_{\substack{p \text{ простое} \\ p \leqslant n}} p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]} < \prod_{\substack{p \text{ простое} \\ p \leqslant n}} p^{\frac{\log n}{\log p}} = n^{\pi(n)},$$

а последнее число меньше 3^n для достаточно больших n.

Лемма 1. *Пусть r и s – неотрицательные целые числа. Если $r > s$, то*

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1 - xy}\, dx\, dy$ *является рациональным числом, знаменатель которого делит d_r^2;*

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1 - xy} x^r y^s\, dx\, dy$ *является рациональным числом, знаменатель которого делит d_r^3.*

Если $r = s$, то

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1 - xy}\, dx\, dy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \cdots - \frac{1}{r^2};$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1 - xy} x^r y^r\, dx\, dy = 2\left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}\right).$

Доказательство. Пусть σ – произвольное неотрицательное число. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy}\, dx\, dy. \tag{1}$$

Разложим $(1-xy)^{-1}$ в геометрический ряд и осуществим двойное интегрирование. В результате получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)}. \tag{2}$$

Предположим, что $r > s$. Тогда мы можем записать эту сумму в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1}\right) = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1+\sigma} + \cdots + \frac{1}{r+\sigma}\right). \tag{3}$$

Если мы положим $\sigma = 0$, то утверждение a) следует немедленно. Если мы продифференцируем относительно σ и положим $\sigma = 0$, то интеграл (1) перепишется в виде

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s\, dx\, dy,$$

а сумма (3) станет равной

$$\frac{-1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2}\right).$$

Утверждение b) вытекает теперь непосредственно.

Пусть $r = s$, тогда согласно (1) и (2)

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1-xy}\, dx\, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}.$$

Полагая $\sigma = 0$, утверждение c) становится тривиальным. Продифференцируем по σ и положим $\sigma = 0$. Тогда получим

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r\, dx\, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k+r+\sigma+1)^3},$$

что доказывает утверждение d).

Теорема 1. *$\zeta(2)$ иррационально.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy}\, dx\, dy, \tag{4}$$

где $P_n(x)$ – многочлен Лежандра, заданный формулой $n!P_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n$. Заметим, что $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. В этом доказательстве двойное интегрирование мы будем обозначать одинарным символом $\int$. Как следует из леммы 1, интеграл (4) равен $\big(A_n + B_n\zeta(2)\big)d_n^{-2}$ с некоторыми $A_n \in \mathbb{Z}$ и $B_n \in \mathbb{Z}$. После n-кратного частного интегрирования по переменной x интеграл (4) примет вид

$$(-1)^n \int \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}}\, dx\, dy. \tag{5}$$

С помощью прямых вычислений нетрудно показать, что

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Следовательно, интеграл (4) ограничен сверху величиной

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \int \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2).$$

Поскольку интеграл (5) не равен нулю, имеем

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| d_n^{-2} < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)$$

и, следовательно,

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| < d_n^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) < 9^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) < \left(\frac{5}{6}\right)^n \zeta(2)$$

для достаточно больших n, откуда вытекает иррациональность $\zeta(2)$.

Теорема 2. *$\zeta(3)$ иррационально.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} P_n(x) P_n(y)\, dx\, dy \tag{6}$$

где $n!P_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n$. Как следует из леммы 1, интеграл (6) равен $\big(A_n + B_n\zeta(3)\big)d_n^{-3}$ для некоторых $A_n \in \mathbb{Z}$, $B_n \in \mathbb{Z}$. Замечая, что

$$\frac{-\log xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\, dz,$$

интеграл (6) можно записать как

$$\int \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,dx\,dy\,dz$$

где $\int$ обозначает тройное интегрирование. После n-кратного частного интегрирования по x наш интеграл запишется в виде

$$\int \frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{\bigl(1-(1-xy)z\bigr)^{n+1}}\,dx\,dy\,dz.$$

Сделаем подстановку

$$w=\frac{1-z}{1-(1-xy)z},$$

следовательно,

$$z=\frac{1-w}{1-(1-xy)w},\qquad dz=\frac{-xy\,dw}{\bigl(1-(1-xy)w\bigr)^2},\qquad 1-(1-xy)z=\frac{xy}{1-(1-xy)w}.$$

В результате получим

$$(-1)^n\int (1-x)^n(1-w)^n\frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w}\,dx\,dy\,dw.$$

После n-кратного частного интегрирования по y находим

$$\int \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{\bigl(1-(1-xy)w\bigr)^{n+1}}\,dx\,dy\,dw. \tag{7}$$

Отметим, что $x(1-x)y(1-y)w(1-w)\bigl(1-(1-xy)w\bigr)^{-1}$ может достигать своего максимума только при $x=y$. Поэтому несложно показать, что

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}\leqslant(\sqrt{2}-1)^4\qquad\text{для всех}\quad 0\leqslant x,y,w\leqslant 1.$$

Следовательно, интеграл (6) ограничен сверху величиной

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^4\int\frac{1}{1-(1-xy)w}\,dx\,dy\,dw &= (\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1\frac{-\log xy}{1-xy}\,dx\,dy\\ &= 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3).\end{aligned}$$

Поскольку интеграл (7) отличен от нуля, имеем

$$0<|A_n+B_n\zeta(3)|d_n^{-3}<2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}$$

и, значит,

$$0<|A_n+B_n\zeta(3)|<2\zeta(3)d_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n}<2\zeta(3)27^n(\sqrt{2}-1)^{4n}<2\zeta(3)\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

для достаточно больших n, откуда следует иррациональность $\zeta(3)$.

Список литературы

1. *Poorten A. van der.* A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ // Math. Intell. 1979. V. 1. P. 195–203.